

A Game Theory Pitfall -- "The Value of a Game"

Among the suggestions offered in response to a recent request for advice by an Operations Research practitioner was the use of game theory. Members of CORS should be aware that in addition to known difficulties with utility and game theory, the concept of "the value of a game" is not well defined.

The minimax theorem, which states that every two-person zero-sum game with finitely many pure strategies has optimal mixed strategies, is a cornerstone of game theory. Given a two-person zero-sum game, denote by x^* and y^* the optimal strategies and by u the utility function of player 1. Utility functions are not unique and for any p and positive q , u is equivalent to $p+qu$ but since the optimal strategies do not depend on the choice of p and q , x^* and y^* are well defined. However, the value of the game varies when p and q vary so that it depends on the choice of the utility function u . In fact, given an arbitrary real number v , the numbers p and q can be chosen so that the value of the game equals v . Therefore, the concept of the value of a game is ill-defined and any game theoretic concept that depends on "the" value of a game is ill-defined as well.

Jonathan Barzilai
Dalhousie University

« La valeur du jeu », un piège de la théorie des jeux

Une des suggestions proposées en réponse à une récente consultation par un praticien de la recherche opérationnelle a été l'utilisation de la théorie des jeux. Or, les membres de la SCRO ne devraient jamais perdre de vue qu'en plus des difficultés connues associées à la théorie de l'utilité et à la théorie des jeux, le concept de « valeur du jeu » n'est pas clairement défini.

Le théorème du minimax, selon lequel tout jeu à deux joueurs de somme nulle ayant un nombre fini de stratégies pures a des stratégies mixtes optimales, est une pierre angulaire de la théorie des jeux. Pour tout jeu à deux joueurs de somme nulle, on note par x^* et y^* les stratégies optimales et par u la fonction utilité du joueur 1. Les fonctions utilité ne sont pas uniques et pour tout p et q positif, u est égal à $p+qu$, mais comme les stratégies optimales ne dépendent pas du choix de p et q , x^* et y^* sont bien définis. Toutefois, la valeur du jeu varie quand p et q varient, elle dépend donc du choix de la fonction utilité u . En fait, pour un nombre réel arbitraire v , on peut choisir les nombres p et q pour que la valeur du jeu soit égale à v . Par conséquent, le concept de valeur du jeu est mal défini et tout concept fondé sur la théorie des jeux reposant sur « la » valeur du jeu est lui aussi mal défini.

Jonathan Barzilai
Université Dalhousie